Zusammenfassung Physik

Jahr: 2015/2016
Verfasser: Simon Erne, ITET

Beachte!
Diese Zusammenfassung erhebt keinen Anspruch auf Vollständig- und Korrektheit. Sie wurde verfasst basierend auf Zusammenfassungen von diversen Vorgängern (Besten Dank an dieser Stelle), der Vorlesung von Professor A. Imamoglu (FS16) und dem Buch „Physik“ von Paul A Tipler.

Fehler bitte an ernesi@ethz.ch melden, sodass auch weitere davon profitieren können.

Viel Glück!

Errata

Datum	Kapitel	Bemerkung
18.9.17	Erzwungene Schwingung und Resonanz	Bei $\Omega \ll \omega_0$ & $\Omega = \omega_0$ fehlt ein ^2 unter dem Bruch.
	Wellengeschwindigkeit	Einheit für Kompressionsmodul
	Wellenausbreitung an Hindernissen	Teil über Impedanz ersetzt durch Vorschlag von Felix Carazzolara
	Stehende Wellen	Überlagerung, Formel korrigiert
	Zustandsänderung	adiabatisch, kein Minus in der ersten Schreibweise *(ΔT muss dementsprechend gewählt werden)*
	Transformationen	Korrektur der Invarianz Formel
	neues Design und sonstige kleinere Überarbeitungen	

Besten Dank an die Fehlereinsendungen von:
- Jonas Roth *(2017)*
- Felix Carazzolara *(2017)*
- Trautweiler Florain *(2017)*

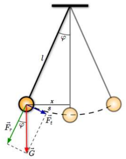
Physik 1

© Simon Erne (ernesi@ethz.ch)
ITET – Professor A.Imamoglu– FS 16

Basics

Kugel	
Volumen	$4\pi r^3/3$
Oberfläche	$4\pi r^2$
Zylinder	
Volumen	$\pi r^2 h$
Mantel	$2\pi rh$
Oberfläche	$2\pi rh + 2\pi r^2$
Kegel	
Volumen	$\pi r^2 h/3$
Mantel	$rs\pi$
Oberfläche	$r\pi(r+s)$
Mantellinie	$s = \sqrt{h^2 + r^2}$

Federpendel



φ *Auslenkwinkel mit* $\sin(\varphi) = x/l$
l *Länge des Pendels*
s *Auslenkung des Pendels* | $s = l \cdot \varphi$
G *Erdanziehung* | $G = m \cdot g$
F_r *Kraftkomponente in Richtung Faden*
F_t *tangentielle Kraftkomponente*
m *Masse des Pendels*
g *Erdbeschleunigung* $= 9{,}81\ m/s^2$

$F(t) = -mg\sin(\varphi(t)) = m \cdot a(t)$
↳ Masse hat keinen Einfluss auf die Bewegung

Bem: Für kleine Auslenkungen φ gilt:
$\tan(\varphi) \approx \sin(\varphi) \approx \varphi$ & $\cos(\varphi) \approx 1$

Grösseneinheiten

G	Giga	10^9	**k**	Kilo	10^3	**μ**	Mikro	10^{-6}	**p**	Piko	10^{-12}
M	Mega	10^6	**m**	Milli	10^{-3}	**n**	Nano	10^{-9}	**f**	Femto	10^{-15}

Additionstheoreme

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$	$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$
$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$	$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$	$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

Konstanten

c_0	Lichtgeschwindigkeit	$299'792'458\ \frac{m}{s}$	$= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$
ϵ_0	elektrische Feldkonstante	$8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \frac{As}{Vm}$	$= \frac{1}{\mu_0 c^2}$
μ_0	magnetische Feldkonstante	$4\pi \cdot 10^{-7}$, $1{,}256 \cdot 10^{-6}\ \frac{N}{A^2}$	$= \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$
$c_{S,L}$	Schallgeschwindigkeit in Luft	$343\ m/s$	
$c_{S,W}$	Schallgeschwindigkeit in Wasser	$1485\ m/s$	
g	Erdbeschleunigung	$9.80665 m/s^2$	
u	atomare Masseneinheit	$1.66 \cdot 10^{-27} kg$	

Einheiten

Frequenz	Hertz Hz	$1/s$	Kraft	Newton N	$\frac{m \cdot kg}{s^2}$
Druck	Pascal Pa	$\frac{N}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s^2}$	Energie	Joule J	$N \cdot m = \frac{m^2 \cdot kg}{s^2}$
Leistung	Watt W	$\frac{J}{s} = \frac{m^2 \cdot kg}{s^3}$	Drehmoment	Newton Meter $N \cdot m$	$\frac{m^2 \cdot kg}{s^2}$

Feder

Federkonstante	k oder c	$\frac{N}{m} = \frac{kg}{s^2}$	Federkraft	F	$F = k \cdot \Delta L$

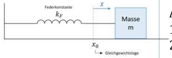
Schwingungen

harmonische Schwingung

$$F = -k_F \cdot x = m \cdot a \qquad a = \ddot{x} = -\frac{k_F}{m} \cdot x \qquad \omega = \sqrt{\frac{k_F}{m}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

F ≔ Kraft $[N] = \left[\frac{kg \cdot m}{s^2}\right]$ — a ≔ Beschleunigung $\left[\frac{m}{s^2}\right]$ — k_F ≔ Federkonstante $\left[\frac{N}{m}\right] = \left[\frac{kg}{s^2}\right]$
ω ≔ Kreisfrequenz $\left[\frac{1}{s}\right] = [Hz]$ — T ≔ Periode $[s]$ — f ≔ Frequenz $\left[\frac{1}{s}\right] = [\mathrm{Hz}] = \frac{1}{T}$

Bem: $F \coloneqq \sum F_i$ welche in x Richtung wirken, wobei $a = \ddot{x}$



Allg. Lösung: $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$
1. Ableitung: $\dot{x}(t) = v = A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi)$
2. Ableitung: $\ddot{x}(t) = \dot{v} = a = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

A ≔ *Amplitude* — φ ≔ *Phasenverschiebung*

Pendel	$\omega_{mathematisches} = \sqrt{\frac{g}{l}}$	$\omega_{physikalisch} = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot d}{I}}$

d ≔ *Abstand Massenmittelpunkt zum Drehpunkt* — I ≔ *Trägheitsmoment bez. Rotationsachse*

Mechanische Energie

E_{mech}	$= E_{pot} + E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k_F x^2 = \frac{1}{2}k_F A^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$

mit $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ — $E_{pot} = \frac{1}{2}k_F(x - x_0)^2$ — $x_0 \coloneqq$ *Ruhelage*

gedämpfte Schwingung

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k_F}{m}x = 0$$

Allg. Lösung: $x(t) = A \cdot e^{\lambda t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}$

$F_{Reibung} = -b \cdot v = -b \cdot \dot{x}$ — $\lambda_{1,2} = \frac{-b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}$ — $\omega_0 = \sqrt{k_F/m}$ — $b =$ *Dämpfungskonst.*

Dämpfungstypen			
Überdämpfung (aperiodische Schwingung)	$\frac{b}{2m} > \omega_o$	$x(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}$	$\lambda_{1,2} > 0 \in \mathbb{R}$
Kritische Dämpfung (aperiodischer Grenzfall)	$\frac{b}{2m} = \omega_0$	$x(t) = A \cdot e^{\lambda_0 t} + B \cdot e^{\lambda_0 t}$ Zeit bis Ruhelage ist minimal	$\lambda_0 = \frac{-b}{2m}$
Schwache Dämpfung	$\frac{b}{2m} < \omega_o$	$x(t) = e^{\frac{-b}{2m}}\left(Ae^{i\omega' t} + Be^{-i\omega' t}\right)$	

Dämpfungsfaktor: $e^{-b/2m}$ — Renormalisierte Kreisfrequenz $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ — Quasi Periode $T' = \frac{2\pi}{\omega'}$

Dämpfungskoeff. γ	$\gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{b}{m}$	Gütefaktor Q	$Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$
τ = *Zeitkonstante (Zerfallszeit)* $= m/b$		w_0 = *Resonanzfrequenz*	

Erzwungene Schwingung und Resonanz

$$\ddot{x}(t) + \frac{b}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = \underbrace{\frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)}_{\text{äussere Kraft}}$$

homogene Diff: $x_h(t) = [\dots]$ (→gedämpfte Schwingung → schwache Dämpfung)
partikuläre Diff: $x_p(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}}\cos(\Omega t + \phi)$ ■ = *Amplitude der er – zwungenen Schwingung*
$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$ ■ = *Phasenverschiebung Kraft – erzwungenen Schwingung*

$\Omega \ll \omega_0$	Schwingung folgt der antreibenden Kraft:	$x(t) = \frac{F_0}{m \cdot \omega_0^2}\cos(\Omega t)$	in Phase mit *äusserer Kraft*
$\Omega \gg \omega_0$	Masse kann der Schwingung nicht folgen:	$A = \lvert x_0 \rvert \cong \frac{F_0}{m \cdot \Omega^2} \to 0$	$\phi = -\pi$
$\Omega = \omega_0$	Resonanz:	$A = \lvert x_0 \rvert = \frac{F_0}{m \cdot \omega_0^2} \cdot Q$	$\phi = -\pi/2$

Vorgehen

1. Alle wirkenden Kräfte finden $F_{ges} = m\ddot{x}$
2. Homogene DGL durch Koeffizientenvergleich oder allgemein lösen
3. Partikuläre Lösung durch Gleichgewichtsbedingungen bestimmen ($\ddot{x} = 0$). (u.U. nur den Realteil beachten)
4. Allgemeine Lösung: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$
5. Ggf. ableiten und Anfangsbedingungen einsetzen

Parametrische Verstärkung

$\ddot{x}(t) + \omega_0^2(1 + f(t))x(t) = 0$	$f(t) = \Delta\cos(\xi t)$

treibende Kraft: $F(t) = -\frac{1}{2}m\omega_0^2[\cos(\omega_0 t - \xi t + \Phi) + \cos(\omega_0 t + \xi t + \Phi)]$
für $\xi = 2\omega_0$ entsteht ein resonanter Kraftterm, der zu einer Verstärkung der Schwingung führen kann Bsp: Pendel mit variierender Länge

Δ ≔ *Modulationstiefe* — ξ ≔ *Modulationsfreqzuen*

Wellen

Transversale Wellen: Störung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung
Longitudinale Wellen: Störung längs/parallel zur Ausbreitungsrichtung

Wellengleichung

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

Wellengeschwindigkeiten

Saite	$v_{Saite} = \sqrt{\frac{\lvert F_s \rvert}{\mu}} = \sqrt{\frac{\lvert F_{Masse} \rvert \cdot l_{Saite}}{m_{Saite}}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$	
Schall	$v_{Flüssigkeit,Gas} = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$	$v_{Gas} = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}} = \sqrt{\kappa\frac{p}{\rho}}$
Festkörper	$v_{longitudinal} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = l\sqrt{\frac{k}{m}}$	$v_{transversal} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

F_s ≔ Kraft [N] — l ≔ *Länge* $[m]$ — ρ ≔ *Dichte* $= \left[\frac{m}{V}\right] = \left[\frac{kg}{m^3}\right]$
G ≔ *Schubmodul* $= \frac{1}{2(1+\nu)} \cdot E$, ν = *Poissonzahl* — K ≔ *Kompressionsmodul* $-V \cdot \frac{\partial p}{\partial V}$ $\left[\frac{N}{m^2}\right]$ — E ≔ *Elastizitätsmodul* $\left[\frac{N}{m^2}\right] = \frac{\sigma}{\epsilon}\left(\frac{\text{Spannung}}{\text{Dehnung}}\right)$
R ≔ *universelle Gaskonstante* — κ ≔ *Adiabatenexponent* $\frac{c_p}{c_V}$ — M ≔ *molare Masse* $\left[\frac{kg}{mol}\right] = \frac{\text{Masse } m}{\text{Stoffmenge } n}$
p ≔ *Druck* $[Pa] = \left[\frac{N}{m^2}\right] = \left[\frac{kg}{m \cdot s^2}\right]$ — μ ≔ *lin. Massendichte* $\left[\frac{m}{l}\right]$ — T ≔ *absolute Tempereatur* $[°K]$

Harmonische Wellen

$$\xi(x,t) = A \cdot \sin(kx \pm \omega t + \phi)$$

"+" für Ausbreitung in minus x Richtung
"–" für Ausbreitung in plus x Richtung

Zeit

1. Ableitung $\frac{\partial\xi}{\partial t} = \pm\omega \cdot A \cdot \cos(kx \pm \omega t + \phi)$
2. Ableitung $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \cdot A \cdot \sin(kx \pm \omega t + \phi)$

Strecke

1. Ableitung $\frac{\partial\xi}{\partial x} = \pm k \cdot A \cdot \cos(kx \pm \omega t + \phi)$
2. Ableitung $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = -k^2 \cdot A \cdot \sin(kx \pm \omega t + \phi)$

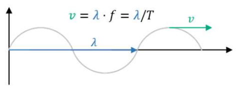
k ≔ *(Kreis–)Wellenzahl* — A ≔ *Amplitude* — ϕ ≔ *Phase*

(Kreis-)Wellenzahl

$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi \cdot f}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$

$v = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{k}$

v ≔ *Phasengeschwindigkeit*
λ ≔ *Wellenlänge*



Mechanische Leistung

verrichtete Leistung	$P_{Translation}\ [W] = \left[\frac{J}{s}\right] = F \cdot v$	$= -\sigma \cdot \frac{\partial\xi}{\partial t} \cdot A$ $= -E \cdot \frac{\partial\xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial\xi}{\partial t} \cdot A$
mittlere Leistung einer Welle (über eine Periode T)	$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot v \cdot \omega^2 \cdot A^2 \quad = \frac{1}{2}E\frac{\omega^2 A^2}{v}$	Annäherung $\langle P \rangle = \frac{\Delta E}{\Delta t}$
mittlere Energie einer Saite der Länge Δx	$\langle \Delta E \rangle = \frac{1}{2}\mu \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot \Delta x$	

INTENSITÄT

$$I = \frac{\text{mittlere Leistung}}{\text{Fläche}} = \frac{\langle P \rangle}{A} = -\sigma \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = -E \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = E \frac{\omega^2}{v} A^2 \cos^2(kx \pm \omega t + \phi)$$

$I :=$ Intensität $[I] = \left[\frac{W}{m^2}\right] = \left[\frac{kg}{s^3}\right]$ $\sigma :=$ Spannung $E :=$ Elastizitätsmodul

- meist reicht: die Intensität ist proportional zur Amplitude $I \propto A^2$
- Hörbereich Mensch: $\sim 10^{-12}\left[\frac{W}{m^2}\right]$ bis $Schmerzschwelle \sim 1\left[\frac{W}{m^2}\right]$

Bsp.: $I_{punktförmige\ Schallquelle} = \frac{\langle P \rangle}{4\pi r^2}$

Intensitätspegel [dB]	$(10dB) \cdot log \frac{I}{I_0}$	$I_0 = 10^{-12}\left[\frac{W}{m^2}\right]$

Hörschwelle: $(10dB) \cdot \log\frac{I_0}{I_0} = 0dB$ Schmerzschwelle: $(10dB) \cdot \log\frac{1}{10^{-12}} = 120dB$ Referenzgrösse I_0

SPHÄRISCHE WELLEN

$\xi(r,t) = \frac{A_0}{r}\cos(kr \pm wt + \varphi)$		- Amplitude A der Welle muss mit $\frac{1}{r}$ skaliert werden, da $I \propto A^2$ - die Energie/ Leistung verteilt sich auf der Kugeloberfläche
Intensität	$I = \frac{P}{4\pi r^2}$	

DOPPLER EFFEKT

$$f_{Empfänger} = f_{Sender} \cdot \left(\frac{c_s \pm v_{Empf}}{c_s \mp v_{Sender}}\right)$$

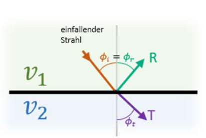
$c_s :=$ Schallges chwindigkeit $= 343\left[\frac{m}{s}\right]$

Empfänger \ Sender	Ruhe	nähern	entfern.
Ruhe	f_S	$f_S \cdot \frac{c_S+0}{c_S-v_S}$	$f_S \cdot \frac{c_S+0}{c_S+v_S}$
nähern	$f_S \cdot \frac{c_S+v_E}{c_S+0}$	$f_S \cdot \frac{c_S+v_E}{c_S-v_S}$	
entfernen	$f_S \cdot \frac{c_S-v_E}{c_S+0}$		$f_S \cdot \frac{c_S-v_E}{c_S+v_S}$

WELLENAUSBREITUNG AN HINDERNISSEN

REFLEXION & TRANSMISSION

Amplitude der Reflexionswelle:	$r = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}$
Amplitude der Transmissionswelle:	$t = \frac{2 \cdot v_2}{v_2 + v_1}$
Snellius'sche Brechungsgesetz	$\frac{\sin \phi_i}{\sin \phi_t} = \frac{v_1}{v_2}$
Grenzwinkel zur Totalreflexion	$\sin(\phi_c) = \frac{v_1}{v_2}$



$1 + r = t$	$r = 0 \Rightarrow keine\ Reflexion$	$r = 1 \Rightarrow Totalreflexion$	$r = -1 \Rightarrow Totalreflexion$ (invertierte Welle)

- für $v_1 = v_2 \rightarrow$ keine Reflexion
- Brechung: Richtungsänderung der Transmissionswelle: für $v_2 > v_1 \rightarrow Brechung\ vom\ Lot\ weg$
- Totalreflexion: Brechungswinkel > 90°

Impedanz

$Z = \rho \cdot v = \sqrt{F_S \cdot \mu} = v_S \cdot \mu$, $[Z] = \frac{kg}{m}$

Bei senkrechtem Einfall gilt:

Verhältnis der Amplituden:

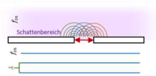
$t = \frac{A_t}{A_i} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = r + 1$ | $r = \frac{A_r}{A_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = t - 1$

Reflektierte und Transmittierte Leistung/Intensität:

$R = \frac{P_{refl}}{P_{einf}} = r^2 = 1 - T$ | $T = \frac{P_{trans}}{P_{einf}} = \frac{Z_2}{Z_1} t^2 = 1 - R$

$\frac{I_{trans}}{I_{einf}} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$ | $\frac{I_{refl}}{I_{einf}} = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2}$

Fermat-Prinzip	Eine Welle läuft zwischen zwei Punkten immer so, dass sie möglichst wenig Zeit braucht. (Ableitung =0)
Huyens'sches Prinzip (Beugung)	Jeder Punkt einer Wellenfront ist Ausgangspunkt einer neuen kugelförmigen Welle (gleiche v & f)



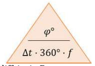
ÜBERLAGERUNG VON WELLEN

INTERFERENZ

$$\xi_{1+2}(x,t) = 2 \cdot A \cdot \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \cdot \sin\left(kx - \omega t + \frac{\delta}{2}\right)$$

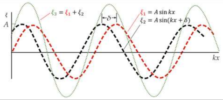
- gleiche Wellenzahl
- gleiche Frequenz

Laufzeitdifferenz	$\Delta t = \frac{\Delta x}{c} = \frac{Gangunterschied}{Schallgeschwindigkeit}$
Phasendifferenz	$\delta = k \cdot \Delta x = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta x}{\lambda} = \Delta t \cdot f \cdot 2\pi$



$\Delta x :=$ Gangunterschied $\lambda :=$ Wellenlänge $= c/f$ $k :=$ Wellenzahl Phasendiff. ist in Bogenmass

konstruktive Interferenz	Überlagerung maximal - Amplitude = $2A$ - $\delta = n \cdot 2\pi \rightarrow 0$
destruktive Interferenz	Überlagerung minimal - Amplitude = 0 - $\delta = (2n+1)\pi \rightarrow \pi = 180°$



Bem: Vollständige destruktive Interferenz nur wenn die Laufzeitdifferenz beider Quellen (mit gleicher Frequenz) zu einem bestimmten Punkt genau der halben Wellenlänge entspricht (für Quellen mit Abstand $< \lambda/2$ ist dies nie der Fall)

SCHWEBUNG

$$\xi(t) = 2 \cdot A \cdot \cos\left(2\pi \frac{\Delta f}{2} t\right) \cdot \sin(2\pi \bar{f} t)$$

Wellen gleicher Amplitude und leicht unterschied. Frequenzen $\rightarrow |\Delta f| \ll \bar{f}$

$\bar{f} :=$ mittlere Frequenz $= \frac{f_1 + f_2}{2}$ $\Delta f :=$ Schwebungsfrequenz $= f_2 - f_1$

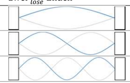
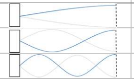
Intensität	$I(t) = 2 \cdot p \cdot v \cdot \omega^2 \cdot P^2(1 + \cos(2\pi\Delta f t))$

Die Intensität schwebt mit der Schwebungsfrequenz Δf

Bem: Die Schwebefrequenz zweier Saiten steigt, wenn die Spannkraft erhöht wird. Das heisst wenn $\Delta f > 0$ ist die Seite zu fest gespannt.

STEHENDE WELLEN

zwei $^{fixe}_{lose}$ Enden	$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \cdot \frac{v}{2l} = n \cdot f_1$	$l = n \cdot \frac{\lambda_n}{2}$, $n = 1,2,3$
ein loses Ende	$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \cdot \frac{v}{4l} = n \cdot f_1$	$l = (2n-1) \cdot \frac{\lambda_n}{4}$, $n = 1,2,3$

n	zwei $^{fixe}_{lose}$ Enden	λ_n	f_n	ein loses Ende	λ_n	f_n
1		$\frac{2l}{1}$	$1\left(\frac{v}{2l}\right)$		$\frac{4l}{1}$	$1\left(\frac{v}{4l}\right)$
2		$\frac{2l}{2}$	$2\left(\frac{v}{2l}\right)$		$\frac{4l}{3}$	$3\left(\frac{v}{4l}\right)$
3		$\frac{2l}{3}$	$3\left(\frac{v}{2l}\right)$		$\frac{4l}{5}$	$5\left(\frac{v}{4l}\right)$

Dargestellt: $n - te\ Harmonische$ (in der Abb. für 2 $^{fixe}_{lose}$ Enden ist die Version mit zwei fixen Enden abgebildet)
Bem.: die 1.Harmonische = Grund-/Fundamentalfrequenz & die 2.Harmonische = 1. Oberschwingung

Überlagerung	$\xi(x,t) = \sum_n A_n \cdot \sin(k_n x) \cdot \cos(\omega_n t + \delta_n)$

$\omega_n = 2\pi f_n$ $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$ $A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \sin(k_n x) \cdot \xi(x,0)dx$

FOURIER REIHE (SCHWINGUNGEN)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2\pi f \cdot n \cdot x) + b_n \sin(2\pi f \cdot n \cdot x)$$

n → für die Frequenz der n-ten Harmonische

$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(x)\cos(2\pi f \cdot n \cdot x)dx$	$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(x)\sin(2\pi f \cdot n \cdot x)dx$
partielle Integration	$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)dy = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx$

THERMODYNAMIK

BASICS

$1l$	$\triangleq$	$1dm^3$	$\triangleq$	$10^{-3}m^3$	$\triangleq$Wasser	$1kg$
$1dl$	$\triangleq$	$100cm^3$	$\triangleq$	$10^{-4}m^3$	$\triangleq$Wasser	$100g$
$1cl$	$\triangleq$	$10cm^3$	$\triangleq$	$10^{-5}m^3$	$\triangleq$Wasser	$10g$
$1ml$	$\triangleq$	$1cm^3$	$\triangleq$	$10^{-6}m^3$	$\triangleq$Wasser	$1g$

Logarithmusgesetze

$\log(a^{p/q}) = \frac{p}{q} \cdot \log(a)$	$\log(u \cdot v) = \log(u) + \log(v)$
$\log\left(\frac{u}{v}\right) = \log(u) - \log(v)$	$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b}$

Potenzgesetze

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$a^x = \lim_{m/n \rightarrow x} a^{\frac{m}{n}}$	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
$(ab)^m = a^m \cdot b^m$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

KONSTANTEN

k_B	Boltzmann Konstante	$1{,}38 \cdot 10^{-23}\ [J/°K]$
n_A	Avogadro-Zahl Definition von Mol	$6{,}022 \cdot 10^{23}[Teilchen/mol]$
R	universelle Gaskonstante	$8{,}314\left[\frac{J}{mol \cdot °K}\right] = k_B \cdot n_A = 8{,}3141 \cdot 10^{-5}\left[\frac{bar \cdot m^3}{mol \cdot °K}\right]$

DEFINITIONEN & EINHEITEN

c	spez. Wärmekapazität	$\left[\frac{J}{kg \cdot °K}\right] = \left[\frac{m^2}{s^2 \cdot °K}\right]$
C	molare Wärmekapazität	$= c \cdot M = c \cdot \frac{m}{n} = \left[\frac{J}{mol \cdot °K}\right]$ $M :=$ molare Masse ; $m :=$ Masse ; $n :=$ Anzahl Teilchen
$\lambda_{S,D}$	spez. Schmelz-/Verdampfungswärme	$\left[\frac{kJ}{kg}\right]$
J	Joule	$[J] = \left[\frac{kg \cdot m^2}{s^2}\right]$
p	Druck	$1\ [bar] = 10^5[Pa] = 10^5[N/m^2]$ $1atm = 1{,}0133 \cdot 10^5[Pa]$
K	Kelvin	$K = °C + 273{,}15$

GRÖSSEN

Zustandsgrössen ⇒ Δ bei Differentialen, Indefinitesimale Grössen die Integriert werden, Wegunabhängig

U	innere Energie	p	Druck	T	Temperatur
V	Volumen	$\tilde{n}/n$	Anz. Mol / Teilchen	S	Entropie

Austauschgrössen ⇒ δ bei Differentialen, Wegabhängig

δW	am System oder vom System verrichtete Arbeit
δQ	vom System aufgenommene oder abgegebene Wärme

Δ bezeichnet eine makroskopische Änderung einer Grösse $\Rightarrow \Delta U = \int_\gamma dU$

WISSENSWERTES

Phasenübergänge

Erstarren	flüssig → fest	Schmelzen	fest → flüssig
Verdampfen	flüssig → gasf.	Kondensieren	gasf. → flüssig
Sublimieren	fest → gasf.	Resublimieren	gasf. → fest

Molare Masse

Kohlenstoff	C	$12{,}011\left[\frac{g}{mol}\right]$	Sauerstoff	O	$15{,}999\left[\frac{g}{mol}\right]$
Wasserstoff	H	$1.00794\left[\frac{g}{mol}\right]$			

Wärmekapazitäten

c_{wasser}	$4{,}182\ [kJ/kg \cdot °K]$	c_{Eis}	$2{,}060\ [kJ/kg \cdot °K]$
$c_{Wasserdampf}$	$2{,}02[kJ/kg \cdot °K]$	c_{Kupfer}	$0{,}386\ [kJ/kg \cdot °K]$
c_{Silber}	$0{,}223\ [kJ/kg \cdot °K]$	c_{Gold}	$0{,}126\ [kJ/kg \cdot °K]$

Molare Wärmekapazitäten c_p & c_V

1atomige Gase	c_p	c_V	2atomige Gase	c_p	c_V	>2atomige Gase	c_p	c_V
He	20,79	12,52	H_2	20,44	2,46	CO_2	36,62	28,17
Ne	20,79	12,68	H_2	20,98	2,52	N_2O	36,90	28,39
Ar	20,79	12,45	CO	20,74	2,49	H_2S	36,12	27,36

spez. Schmelz- /Verdampfungswärme

$\lambda_{S,Eis}$	$333{,}5\ [kJ/kg]$	$\lambda_{D,Wasser}$	$2257\ [kJ/kg]$
λ_{S,O_2}	$13{,}8\ [kJ/kg]$	λ_{D,O_2}	$213\ [kJ/kg]$

Tripelpunkt

Wasser	$273{,}16\ °K$ & $6{,}105 mbar$	CO_2	$216{,}55\ °K$ & $5{,}17 bar$

Van der Waals Koeffizienten

	$a = \left[\frac{l^2 \cdot bar}{mol^2}\right]$	$b = \left[\frac{ml}{mol}\right]$		$a = \left[\frac{l^2 \cdot bar}{mol^2}\right]$	$b = \left[\frac{ml}{mol}\right]$
He	0.0350	23.8	H_2	0.247	26.6
O_2	1.4	31.86	Ar	1.36	32.2
H_2O	5.53	30.5	CO_2	3.64	42.7

Nullter Hauptsatz der Thermodynamik

$T_A = T_C$ & $T_B = T_C \Longrightarrow T_A = T_B$	Körper A und B müssen sich dabei nicht im direkten Kontakt zueinander stehen.

Gasthermometer

$T = \frac{p}{p_{Tripel}} \cdot T_{Tripel} °K = \frac{p}{61.05 Pa} 273{,}15 °K$	p := aktueller Druck p_{Tripel} := Referenzdruck

Trippelpunkt: An diesem Punkt stehen Dampf, Flüssigkeit und Festkörper im Gleichgewicht

Zustandsgleichung idealer Gase

$\boxed{p \cdot V = n \cdot k_B \cdot T_K \;=\; \tilde{n} \cdot R \cdot T}$ mit: $n = \tilde{n} \cdot n_A$

n := Gasteilchen; V := Volumen; T_K := Temperatur $[K]$
R = universelle Gaskonstante; k_B = Boltzmann Konstante; $\tilde{n}$:= Anzahl Mol

ZG für eine bestimmte Menge des idealen Gases	$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$

Van der Waals Gleichung / Zustandsgleichung realer Gase

$$\left(p + \frac{a\tilde{n}^2}{V^2}\right)(V - b\tilde{n}) = \tilde{n} \cdot R \cdot T$$

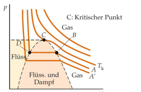
$$W = -\int_{V_A}^{V_E} p\, dV = -\int_{V_A}^{V_E} \left(\frac{\tilde{n}RT}{V - nb} - a\frac{\tilde{n}^2}{V^2}\right) dV = -\tilde{n}RT \ln\left(\frac{V_E - \tilde{n}b}{V_A - \tilde{n}b}\right) - a\tilde{n}^2 \frac{V_A - V_E}{V_A \cdot V_E}$$

Koeff. b weil Gasteilchen nicht punktförmig sind — Koeff. a berücksichtigt Anziehungskräfte der Gasteilchen
Bem.: Der Koeff. a ist klein für Edelgase, da diese nur eine Anziehungskraft aufeinander ausüben

Wärme & Wärmekapazität

zugeführte Wärme für einen Temperaturanstieg von ΔT	$Q = m \cdot c \cdot \Delta T$ $\quad \Delta T = (T_E - T_A)$
molare Wärmekapazität	$C = \frac{m \cdot c}{\tilde{n}} = c \cdot m_{mol}$
Schmelz- / Verdampfungswärme (=latente Wärme)	$\delta Q_{S,D} = m \cdot \lambda_{S,D}$

c := spezifische Wärmekapazität; m := Masse & m_{mol} := Molare Masse $= m/\tilde{n}$
$\lambda_{S/D}$:= spezifische Schmelz – /Verdampfungswärme; $\tilde{n}$:= Anzahl Mol

Sättigungs-dampfdruck	Druck, bei welchem die gasförmige Phase im Gleichgewicht mit der flüssigen oder festen Phase steht (Bsp.: B-D) Für Wasser im Bereich von $100 - 374°C$ gilt die Faustformel: $p_{Wasser}^{sat}[bar] = \left(\frac{T[°C]}{100}\right)^4$	
Tripelpunkt	• feste, flüssige und gasförmige Phase im Gleichgewicht • Bei tieferem Druck als der Tripelpunkt kann die flüssige Phase nicht existieren	

Für ideale Gase gilt:

$c_p = c_V + R$	c_p := molare Wärmekapazität bei konstantem Druck c_V := molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen
$c_V = \frac{f}{2} R \qquad c_p = \left(\frac{f+2}{2}\right) R$	R := universelle Gaskonstante f := Freiheitsgrade
Gleichverteilungssatz	pro Freiheitsgrad f kann pro Mol die Energie $\frac{1}{2} R \cdot T$ gespeichert werden

Freiheitsgrade: 3x Translation ; 3x Rotation (atomar, linear, gewinkelt) & Vibrationsfreiheitsgrade
Bem: Für Flüssigkeiten gilt meist in guter Näherung $c_V = c_p$

Dulong-Petit'sche Regel	$C_{molar\ Metalle} = c_p = c_V \approx 3 \cdot R = 24.9 \frac{J}{mol \cdot °K}$

$C_{molar\ Metalle}$:= molare Wärmekapazitäten von Metallen sind einander sehr ähnlich (Annäherung 3R)

Kinetische Gastheorie

Mittlere kinetische Energie eines Teilchens:	$\langle E_{kin} \rangle = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T_K$
mittlere Geschwindigkeit eines Teilchens	$\langle v^2 \rangle = \frac{3 \cdot k_B \cdot T_K}{m} = \frac{3 \cdot n_A \cdot k_B \cdot T_K}{n_A \cdot m} = \frac{3 \cdot R \cdot T_K}{m_{Mol}}$

m := mittlere Masse eines Teilchens; m_{Mol} := molare Masse $= n_A \cdot m$
v_{rms} := quadratisch gemittelte Geschwindigkeit $= \sqrt{\langle v^2 \rangle}$

Bem.: Wenn v_{rms} mindestens $15 - 20\%$ der Fluchtgeschwindigkeit eines Planeten beträgt, so überschreiten ausreichend viele Moleküle die Fluchtgeschwindigkeit, sodass das betreffende Gas nicht sehr lange in der Atmosphäre dieses Planeten verbleiben kann.

Innere Energie eines Gases:	$U = n \cdot \langle E_{kin} \rangle = \frac{3}{2} n \cdot k_B \cdot T = \frac{3}{2} \tilde{n} \cdot R \cdot T$
Zustandsgleichung des idealen Gases:	$p \cdot V = n \cdot k_B \cdot T = n \cdot m \cdot \langle {v_x}^2 \rangle$

$\langle {v_x}^2 \rangle$:= mittlere Geschwindigkeit in x-Richtung (reicht für 3D)

Bem.:
- Die Boltzmann-Konstante $[J/K]$
- Die Temperatur eines Gases, mit geringer Dichte (d.h. bei annähernd idealen Gasen), ist ein Mass für die *mittlere kinetische Energie* und damit der *inneren Energie* der Teilchen!

Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Energieerhaltungssatz	$\Delta U = U_{Ende} - U_{Anfang} = W + Q$

δQ / $\delta W \begin{cases} > 0 = \text{dem System zugeführte Wärmeenergie / mechanische Arbeit} \\ < 0 = \text{vom System abgegebene Wärmeenergie / mechanische Arbeit} \end{cases}$

Volumenarbeit / Reversibel

vom Gas verrichtete Arbeit bei Expansion / Komprimierung mit Länge dx und Querschnittsfläche A	$dW = \mp F \cdot dx = \mp p \cdot A \cdot dx = \pm p \cdot \Delta V$
Volumenarbeit (dem Gas zugeführt)	$W = -\int_{V_{Anfang}}^{V_{Ende}} p \cdot dV$

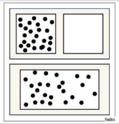
$Gas \begin{cases} \text{komprimieren} \Longrightarrow \Delta V < 0 \Longrightarrow \delta W > 0 \rightarrow \text{Gas gewinnt an Energie} \\ \text{expandieren} \Longrightarrow \Delta V > 0 \Longrightarrow \delta W < 0 \rightarrow \text{Gas verliert an Energie} \end{cases}$

Umrechnungsfaktor: $1l \cdot bar = (10^{-3} m^3) \cdot (10^5 N \cdot m^{-2}) = 100 J$

Zustandsänderungen

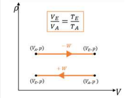
Merke: $p \cdot V = N \cdot k_B \cdot T = \tilde{n} \cdot R \cdot T = const$ — $\tilde{n}$:=Stoffmenge in Mol; N:=Anzahl Teilchen

Freie Expansion (irreversibel) $\Longrightarrow T = const$



innere Energie	$\Delta U = 0$	
zugeführte Wärme	$Q = 0$	
zugeführte Volumenarbeit	$W = 0$	
für ideale Gase	$T_E = T_A$	$p_E = p_A \cdot \frac{V_A}{V_E}$

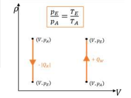
ISOBAR $\Longrightarrow p = const$



innere Energie	$\Delta U = W + Q = \tilde{n} \cdot c_v \cdot \Delta T$
zugeführte Volumenarbeit	$W = -p(V_E - V_A) = -\tilde{n} \cdot R \cdot \Delta T$
zugeführte Wärme	$Q = \tilde{n} \cdot c_p \cdot \Delta T$

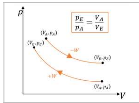
$\tilde{n}$:= Stoffmenge in Mol; ΔT := Temperaturdifferenz; $c_{p,V}$:= molare Wärmekapazitäten

ISOCHOR $\Longrightarrow V = const$



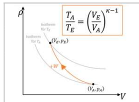
innere Energie	$\Delta U = Q$
zugeführte Volumenarbeit	$W = 0$
zugeführte Wärme	$Q = \tilde{n} \cdot c_V \cdot \Delta T$

ISOTHERM $\Longrightarrow T = const$



innere Energie	$\Delta U = 0$
zugeführte Volumenarbeit	$W = -\tilde{n} \cdot R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{V_E}{V_A}\right) = -\int_{V_A}^{V_E} \frac{\tilde{n} \cdot R \cdot T}{V} dV$
zugeführte Wärme	$Q = -W$
zugeführte Volumenarbeit ideales Gas	$W = -p_A \cdot V_A \cdot \ln\left(\frac{V_E}{V_A}\right)$

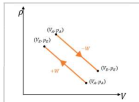
ADIABATISCH (kein Wärmeaustausch mit der Umgebung) $\delta Q = 0$



innere Energie	$\Delta U = W$
zugeführte Volumenarbeit	$W = \tilde{n} \cdot c_V \cdot \Delta T = \frac{p_E \cdot V_E - p_A \cdot V_A}{\kappa - 1}$
zugeführte Wärme	$Q = 0$

Adiabaten Exponent	$\kappa = \frac{c_p}{c_V} = \frac{f+2}{f} = \frac{\ln(p_E/p_A)}{\ln(V_A/V_E)}$	$\kappa = \frac{c_p}{c_V} = \frac{c_V + R}{c_V} = 1 + \frac{R}{c_V}$
Poissonschen Gleichungen $S = const \Leftrightarrow$ isentrop adiabatisch reversibler $\Longrightarrow$ istentrop a	1. $T \cdot V^{\kappa-1} = const$ 2. $p \cdot V^{\kappa} = const$ 3. $T^{\kappa} \cdot p^{1-\kappa} = const$	

LINEAR



Gerade	$p(V) = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{(V_2 - V_1)}(V - V_1)$
zugeführte Volumenarbeit	$W = -\left[p_1(V_2 - V_1) + \frac{1}{2}\frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1}(V_2 - V_1)^2\right]$
zugeführte Wärme	

Freiheitsgrade

Allgemein	Jedes Molekül mit n Atomen hat allgemein $f = 3n$ Freiheitsgrade. dieser setzt sich wie folgt zusammen: $f = f_T + f_R + f_{vib}$		
für n-atomige Moleküle	Atomar	Linear	Gewinkelt
Translation	alle können sich im 3 Dimensionalen Raum bewegen: $f_T = 3$		
Rotation	$f_R = 0$	$f_R = 2$	$f_R = 3$
Vibration	$f_{vib} = 3n - 3$	$f_{vib} = 3n - 5$	$f_{vib} = 3n - 6$

Atome	Freiheitsgrad	c_V	c_p	κ
Atomar	3	$3/2 \cdot R$	$5/2 \cdot R$	$5/3$
Linear	5	$5/2 \cdot R$	$7/2 \cdot R$	$7/5$
Gewinkelt	6	$6/2 \cdot R$	$8/2 \cdot R$	$4/3$

Kreisprozess	In einem Kreisprozess ist die innere Energie $\Delta U = 0$ und der Wirkungsgrad ist: $\eta = \frac{\text{geleistete Arbeit}}{\text{zugeführte Wärme}}$

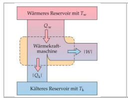
Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Man kann mechanische Energie restlos in Wärme umwandeln. Aber man kann unmöglich Wärme restlos in Arbeit umsetzen. $\Longrightarrow$ *irreversibel*

$\Longrightarrow$ Die ideale Wärmekraftmaschine (welche Wärme komplett in Arbeit umwandelt) und der ideale Kühlschrank (welcher entzogene Wärme komplett einem anderen Reservoir zuführt) existieren nicht!

$\Longrightarrow$ Es gibt keinen Prozess, durch den die Entropie des Universums abnimmt.

Wärmemaschine (z.B. Motor)



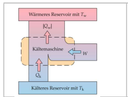
Entnimmt einem *wärmeren Reservoir* T_W Wärmemenge Q_W und verrichtet Arbeit $|W|$ an seiner Umgebung und gibt einem *kälterem Reservoir* T_K die Wärmemenge$|Q_K|$ ab

mechanische Energie	$\lvert W\rvert = Q_W - \lvert Q_K\rvert = \eta \cdot Q_W$
Wirkungsgrad	$\eta = \frac{\lvert W\rvert}{Q_W} = \frac{Q_W - \lvert Q_K\rvert}{Q_W} = 1 - \frac{\lvert Q_K\rvert}{Q_W}$

verläuft der Kreislauf reversibel, also z.B isotherm so gilt $\eta = \frac{T_W - T_K}{T_W}$ mit $Q_W = nRT_W \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ & $|Q_K| = nRT_K \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)$

Bem.: In einem Kreisprozess ist *pro Zyklus* aufgrund der Energieerhaltung die aufgenommene Wärme gleich der Summe der von der Maschine abgegebenen Wärme und der von ihr verrichteten Arbeit.
$\Delta U = 0 \Longrightarrow Q_W = |W| + |Q_K|$

Kältemaschine



Entnimmt dem *kälterem Reservoir* T_K eine Wärmemenge Q_K und gibt eine Wärmemenge $|Q_W|$ an das *wärmere Reservoir* T_W ab

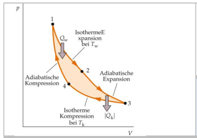
mechanisch-elektrische Energie	$W = \lvert Q_W\rvert - Q_K = Q_1 \frac{\eta}{1-\eta} = Q_2 \cdot \eta$
Wirkungsgrad	$\eta_{KM} = \frac{Q_K}{W} = \frac{Q_K}{\lvert Q_W\rvert - Q_K}$

verläuft der Kreislauf reversibel, also z.B. isotherm so gilt $\eta = \frac{T_K}{T_W - T_K}$ mit $Q_W = nRT_W \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ & $|Q_K| = nRT_K \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)$

$\eta_{KM} :=$ *Leitzungszahl* > 1

Bem.: Eine *Wärmepumpe* funktioniert gleich wie eine Kältemaschine, nur dass der Zweck Gegenstände oder Räume zu wärmen ist anstatt zu kühlen. Daher ist ihr Wirkungsgrad definiert als: $\eta_{WP} = \frac{|Q_W|}{W}$

Der Carnot'sche Kreisprozess



Zwischen zwei gegebenen Wärmereservoiren hat die reversibel arbeitende Wärmekraft-maschine den höchstmöglichen Wirkungsgrad

Carnot-Wirkungsgrad	$\eta_{Carnot} = \frac{T_W - T_K}{T_W}$

mit idealem Gas:

1. Reversible isotherme Aufnahme von Wärme aus einem wärmeren Reservoir mit der Temperatur T_W
2. Reversible adiabatische Expansion, bei der die tiefere Temperatur T_K erreicht wird
3. Reversible isotherme Abgabe von Wärme an ein kälteres Reservoir
4. Reversible adiabatische Kompression, wieder zurück in den Anfangszustand

$T_W :=$ *Temperatur des wärmeren Reservoir* $\qquad T_K :=$ *Temperatur des kälteren Reservoir*

Bem.: - Der Wirkungsgrad des Carnot-Kreisprozess ist unabhängig von der Arbeitssubstanz.
- Als *verlorene Arbeit* bezeichnet man die Differenz zwischen der verrichteten Arbeit einer reversibel arbeitenden Maschine und der von einer realen Maschine verrichteten Arbeit

Bedingungen für Reversibilität	1. Es darf keine mechanische Energie aufgrund von Reibung, viskosen Kräften oder anderen dissipativen Effekten in Wärme umgesetzt werden. 2. Wärmeübertragung zwischen Gegenständen darf nur bei einer infinitesimal geringen Temperaturdifferenz auftreten. 3. Der Prozess muss quasistatisch ablaufen, sodass sich das System stets in einem Gleichgewichtszustand oder in einer infinitesimalen Abweichung davon befindet.

Entropie S

Durch *irreversible Prozesse* geht die Gesamtheit aus System und Umgebung in einen Zustand geringerer Ordnung über. Ein Mass für diese Unordnung ist die Entropie S

Bei einem *reversiblen Prozess* ist die Entropie $\Delta S = \sum_{Kreis} \frac{\partial Q}{T} = 0$

Bem.: Wärmeleitung ist **irreversibel**

Entropie ist ein Mass für die Umkehrbarkeit einer Zustandsänderung

- Bei irreversiblen Prozessen in einem abgeschlossenen System **nimmt die Entropie zu**
- Nur Vorgänge, bei denen die Entropie **wächst**, verlaufen **von selbst**
- Adiabatische Vorgänge sind **nicht immer** reversibel

Makrozustand: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Mikrozustände
Mikrozustand: vollständige mikroskopische Beschreibung eines Systems

Interpretation:

- Ungewissheit: Gegebener Makrozustand?→Mikrozustand?
- Möglichkeiten: #Mikrozustände mit gleichem Makrozustand
- Wahrscheinlichkeit: Wahrscheinlichkeit eines Makrozustands, wenn alle Mikrozustände gleich wahrscheinlich sind.

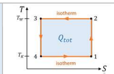
Bem.: Unterscheide stets $i)$ System (z.B. Box) $ii)$ Reservoir $iii)$ Universium = System + Reservoir $\Rightarrow$ Entropieänderung welches Teils des Prozess wird betrachtet?

Entropieänderung	$dS = \frac{dQ_{rev}}{T} = \left[\frac{J}{°K}\right]$ $\Rightarrow \Delta S = \int_{V_A}^{V_E} \frac{dQ_{rev}}{T} dT = n \cdot R \cdot \ln\left(\frac{V_E}{V_A}\right)$
ΔS bei Temperaturänderung	$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m \cdot c \cdot dT}{T} = m \cdot c \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$
ΔS bei Zustandsänderung (Schmelzen/Verdampfen)	$\Delta S = \frac{Q_{S,D}}{T}$ wegen konstanter Temperatur

$dQ_{rev} :=$ *netto zugeführte Wärme, die dem System in einem* ***reversiblen*** *Prozess zugeführt wird*
$T :=$ *absolute Temperatur des kältesten vorhanden Reservoirs*

Entropieänderung eines idealen Gases	
Allgemein	$\Delta S_{Gas} = \int_{T_A}^{T_E} \frac{dQ_{rev}}{T} = n \cdot c_V \cdot \ln\left(\frac{T_E}{T_A}\right) + n \cdot R \cdot \ln\left(\frac{V_E}{V_A}\right)$
isotherme Expansion ($T_A = T_E$)	$\Delta S_{Gas} = N \cdot k_B \cdot \ln\left(\frac{V_E}{V_A}\right)$ $\Delta S_{Gas} = -\Delta S_{Res} \Longrightarrow \Delta S_U = \Delta S_{Gas} + \Delta S_{Res} = 0$
freie Expansion ($T_A = T_E$) & $\delta Q = \delta W = 0$	$\Delta S_{Gas} = \frac{Q}{T} = N \cdot k_B \cdot \ln\left(\frac{V_E}{V_A}\right)$ Bemerke dass $V_E > V_A$ sein muss und so auch $\Delta S > 0 \Rightarrow$ **irreversibler Prozess** $\Delta S_{Res} = 0 \Longrightarrow \Delta S_U = \Delta S_{Gas} \neq 0$

$N :=$ *#Gasatome*



Carnot Kreisprozess	$\Delta S_U = 0 = \Delta S_{Maschine} + \Delta S_W + \Delta S_K$ mit $\Delta S_{Maschine} = 0$ (da die Carnot Maschine zyklisch arbeitet) und $-\Delta S_W = \frac{\delta Q_W}{T_W} = \frac{\delta Q_K}{T_K} = \Delta S_K$

Bem.: Q_{tot} wird vollständig in Arbeit umgewandelt da $\Delta U = 0$

irreversible Prozesse		
isobar	$\Delta S = n \cdot c_p \cdot \int_{T_A}^{T_E} \frac{dT}{T} = n \cdot c_p \cdot \ln\left(\frac{T_E}{T_A}\right)$	
vollständig unelastischer Stoss	$\Delta S_U = \frac{Q}{T} = \frac{m \cdot h \cdot g}{T}$	Block der Masse m fällt aus der Höhe h zu Boden, dabei ist $T = const$
Wärmeübertragung zwischen Wärmereservoiren	von $T_W \to T_K$: $\Delta S_U = \Delta S_K + \Delta S_W = \frac{\delta Q}{T_K} - \frac{\delta Q}{T_W} > 0$	

Bem.: Ist der Anfangs- und der Endzustand der gleiche, so ist auch die Entropie die gleiche → Wegunabhängig!

Durch einen irreversiblen Prozess wird die Energiemenge $W_{entw.} = T \cdot \Delta S_U$ entwertet und ist nicht mehr als Arbeit nutzbar.

$T :=$ *absolute Temperatur des kältesten vorhanden Reservoirs*

Landauer Prinzip

Das Löschen eines Bits an Information hat einen Anstieg der Entropie zur Folge: $\Delta S = k_B \cdot \ln(2)$

T-S Diagramm

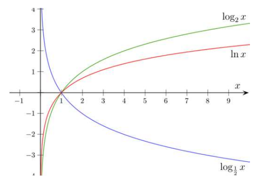
Diagramm mit der Entropie S auf der y-Achse und der Temperatur auf der x-Achse. Wärme:$\partial Q = \Delta S \cdot T$

Entropie und Wahrscheinlichkeit

Die Entropie hängt mit der Wahrscheinlichkeit des betreffenden Zustands zusammen. Ein Zustand höherer Ordnung tritt mit einer geringeren Wahrscheinlichkeit auf, ein Zustand geringerer Ordnung dagegen mit einer höheren Wahrscheinlichkeit. Ein isoliertes, sich selbst überlassenes System nimmt einen Zustand hoher Wahrscheinlichkeit, geringer Ordnung und hoher Entropie an.

Entropie	$S_A = k_B \cdot \ln(\Omega_A)$
Ω_A	Ω_A bezeichnet die #Möglichkeiten = #Mikrozustände mit gleichem Makrozustand Bsp.: 2 Würfel Makro: Summe der Augen = 7 Ω_A: #Möglichkeiten für 7Augen=6
Shannon	Die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Teilchen in einem „Platz“ befindet. $p_i = 1/n_A$ $H = k_B \sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i) = k_B \ln(n_A) = k_b \ln(\Omega_A)$ mit $n :=$ *#verschiedene Zustandsmöglichkeiten* $p_i :=$ *Wahrscheinlichkeit, dass die Gasteilchen den i'ten Zustand einnehmen*

Stochastik	$\frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fällen}}$
Binominal koeffizient	#verschiedener Arten, wie man k Objekte aus einer Menge von n verschiedener Objekte auswählt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ Bsp: $i)$ Wie viele Möglichkeiten gibt es k-Teilchen in einem Gitter von n Teilchen anzuordnen $ii)$ Volumen, unterteilbar in zwei Teilbereiche A & B, so ist die Anzahl von Zuständen die eine gewisse Anzahl von Teilchen k im Bereich A hat $= \binom{n}{k}$, wobei n die Gesamtzahl der Teilchen ist



Dritter Hauptsatz der Thermodynamik

Es ist unmöglich, durch irgendeinen Prozess, und sei er noch so idealisiert, die Temperatur eines Systems in einer endlichen Anzahl von Schritten auf den absoluten Nullpunkt 0°K zu senken.

$\Longrightarrow$ *Nernst'scheWärmetheorem*: Am absoluten Nullpunkt ist die Entropie völlig geordneter Kristalle der chemischen Elemente gleich null. Daher hat jede Verbindung von Elementen eine positive Entropie.

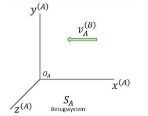
(SPEZIELLE) RELATIVITÄTSTHEORIE

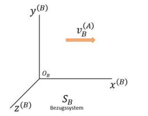
Bezugssystem	Koordinatensystem +Zeitmessung ⇒ ordnet jedem physikalischen Ereignis drei Ortskoordinaten und eine Zeitkoordinate zu
Inertialsystem	Bezugssystem, in welchem sich kräftefreie Körper geradlinig und gleichmässig bewegen ⇒ nicht beschleunigende Systeme
Lichtsekunde	die von Licht in einer Sekunde zurückgelegte Strecke $1Ls = c_{Licht} \cdot s = 299\,792{,}458\ km$

EINSTEINS POSTULATE

Erstes Postulat	Absolute gleichförmige Bewegung kann man nicht messen. Die Naturgesetze haben in allen Inertialsystemen dieselbe Form.
Zweites Postulat	Die Lichtgeschwindigkeit ist unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle.
Zweites Postulat (alternativ)	Jeder Beobachter misst für die Lichtgeschwindigkeit c den selben Wert.

TRANSFORMATIONEN





S_B bewegt sich mit $v_B^{(A)} = const$ relativ zu S_A

$\Rightarrow S_A$ bewegt sich demnach mit $v_A^{(B)} = -V_B^{(A)}$ relativ zu S_B

Galilei Transformation (Klasisch)

$x^{(A)} = x^{(B)} + v_B^{(A)} \cdot t^{(A)}$	$y^{(A)} = y^{(B)}$	$z^{(A)} = z^{(B)}$	$t^{(A)} = t^{(B)}$

Lorentz Transformation

$x^{(A)} = \gamma\left(x^{(B)} + v_B^{(A)} \cdot t^{(B)}\right)$		$y^{(A)} = y^{(B)}$	$z^{(A)} = z^{(B)}$
$t^{(A)} = \gamma\left(t^{(B)} + \frac{v_B^{(A)} \cdot x^{(B)}}{c^2}\right)$		$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\quad 1 \leq \gamma \leq \infty$	$\beta = \frac{v_B^{(A)}}{c}$
Inverse Transformation:	$x^{(B)} = \gamma\left(x^{(A)} - v_B^{(A)} \cdot t^{(A)}\right)$		$y^{(B)} = y^{(A)}$
	$t^{(B)} = \gamma\left(t^{(A)} - \frac{v_B^{(A)} \cdot x^{(A)}}{c^2}\right)$		$z^{(B)} = z^{(A)}$
raumzeitlicher Abstand	$\Delta s = \sqrt{c^2 \cdot \Delta t^2 - \Delta x^2}$	*(Invariante der Lorentztrafo)*	
Räumlicher Abstand	$\Delta x^{(A)} = \frac{v_B^{(A)}\left(t_2^{(B)} - t_1^{(B)}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}$	räumliche Distanz zweier Ereignissen $\left(t_1^{(B)} \& t_2^{(B)}\right)$ im Bezugssystem S_B am selben Ort mit $v_B^{(A)}$ in x_{pos} Richtung von S_A beobachtet	

Bem.: 1) Δx nur so berechnen, falls $x_1^{(A)}$ & $x_2^{(A)}$ noch nicht gegeben ist, sonst einfach $\Delta x = x_1 - x_2$ so auch für Δt
2) $\Delta x^{(A)} / \Delta t^{(A)} = v_B^{(A)} \Rightarrow$ demnach entspricht $\Delta x^{(A)}$ der Entfernung die ein in S_B ortsfester Punkt im System im Bezugssystem S_A mit dazugehörigem Δt zurücklegt

Bem: der räumliche sowie zeitliche Abstand ist nicht gleich in verschiedenen Bezugssystemen → keine Invariante!

ZEITDILATATION

Eigenzeit Δt_{eigen}	Das Zeitintervall zwischen zwei Ereignissen, die in einem Bezugssystem am selben Ort sattfinden. $\Delta t_{eigen} = t_2^{(B)} - t_1^{(B)} = \Delta t_B^{(B)}$
Zeitdilatation	Das Zeitintervall Δt zwischen zwei Ereignissen, die in einem anderen Bezugssystem, in welchem die Ereignisse an unterschiedlichen Orten stattfinden. $\Delta t_B^{(A)} = \gamma \cdot \Delta t_B^{(B)} \quad \Rightarrow t_2^{(A)} - t_1^{(A)} = \gamma\left(t_2^{(B)} - t_1^{(B)}\right)$

Bem.: Das Zeitintervall Δt in einem beliebigem anderen Bezugssystem ist stets grösser als die Eigenzeit

LÄNGENKONTRAKTION

Eigenlänge l_{eigen}	Die Länge eines Körpers, gemessen in dem Bezugssystem in dem der Körper ruht. $l_{eigen} = x_2^{(B)} - x_1^{(B)} = l_B^{(B)}$
Längenkontraktion	In einem anderen Bezugssystem hat der Körper parallel zur Bewegungsrichtung des Körpers gemessen die Länge: $l_B^{(A)} = \frac{1}{\gamma} l_B^{(B)} = l_B^{(B)} \sqrt{1-\beta^2}$

Bem.: $\frac{1}{\gamma} < 1 \Rightarrow$ die Länge l in einem beliebigem anderen Bezugssystem ist stets kleiner als l_{eigen}

RELATIVISTISCHER DOPPLER-EFFEKT

Beim *„normalen" Doppler Effekt* haben wir angenommen, dass Quelle und Beobachter sich in demselben Bezugssystem befinden, das heisst, dass die Zeitintervalle zweier Ereignissen seien identisch. Wird die Zeitdilatation hingegen berücksichtigt, so gilt:

für $\frac{\text{kleiner}}{\text{grösser}}$ werdenden Abstand	$f^{(A)} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 \mp \beta} \cdot f^{(B)}$

Bem.: $f = c/\lambda$ wobei $\lambda \coloneqq Wellenlänge$

GESCHWINDIGKEITSTRANSFORMATION

	invers
$v_x^{(A)} = \frac{v_x^{(B)} + v_B^{(A)}}{1 + v_B^{(A)} \cdot \frac{v_x^{(B)}}{c^2}}$	$v_x^{(B)} = \frac{v_x^{(A)} - v_B^{(A)}}{1 - v_B^{(A)} \cdot \frac{v_x^{(A)}}{c^2}}$
$v_y^{(A)} = \frac{v_y^{(B)}}{\gamma\left(1 + v_B^{(A)} \cdot \frac{v_x^{(B)}}{c^2}\right)}$	$v_y^{(B)} = \frac{v_y^{(A)}}{\gamma\left(1 - v_B^{(A)} \cdot \frac{v_x^{(A)}}{c^2}\right)}$
$v_z^{(A)} = \frac{v_z^{(B)}}{\gamma\left(1 + v_B^{(A)} \cdot \frac{v_x^{(B)}}{c^2}\right)}$	$v_z^{(B)} = \frac{v_z^{(A)}}{\gamma\left(1 - v_B^{(A)} \cdot \frac{v_x^{(A)}}{c^2}\right)}$

RELATIVISTISCHER IMPULS

Impuls *(klassisch)*	$p = m \cdot v$
relativistischer Impuls	$p = \frac{m \cdot v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{m \cdot v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \cdot m \cdot v = m_{rel} \cdot v$

$m \coloneqq Ruhemasse \qquad m_{rel} \coloneqq relativistische\ Masse = \gamma \cdot m \qquad v \coloneqq Geschwindigkeit$

Bem.: Der relativistische Impuls erfüllt folgende Bedingungen:
1) Bei Stössen bleibt der Impuls p erhalten
2) Geht v/c gegen null, so strebt p gegen $m \cdot v$

RELATIVISTISCHE ENERGIE

relativistische kinetische Energie	$E_{kin} = \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} - m \cdot c^2 = m \cdot c^2(\gamma - 1)$
Ruheenergie	$E_0 = m \cdot c^2$
relativistische *(Gesamt-)* Energie	$E = E_{kin} + E_0 = \gamma \cdot m \cdot c^2 = m_{rel} \cdot c^2$
Beziehung E & p & E_0	$E^2 = p_{rel}^2 \cdot c^2 + (m \cdot c^2)^2$ $E_0 = \sqrt{E^2 - (p \cdot c)^2}$
Geschwindigkeit	$v = \sqrt{1 - \left(\frac{m}{m_{rel}}\right)^2} \cdot c$
Massenänderung	$\Delta m_{rel} = \frac{E}{c^2}$

Bem.: 1) für $E \gg m \cdot c^2$ gilt $E \approx p \cdot c$
2) für $v \ll c$ gilt $E = m \cdot p^2 + \frac{p^2}{2m} = m \cdot c^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$
3) $\frac{v}{c} = \beta = \frac{p \cdot c}{E}$

m_{e^-}	Ruhemasse Elektron	$9.109 \cdot 10^{-31} kg$
m_{p^+}	Ruhemasse Proton	$1.671 \cdot 10^{-27} kg$
m_n	Ruhemasse Neutron	$1.674 \cdot 10^{-27} kg$
eV	Elektronenvolt	$1eV = 1{,}602'176'6208 \cdot 10^{-19} \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = [J]$

UHRENSYNCHRONISATION UND GLEICHZEITIGKEIT

Betrachten wir zwei Uhren in S_A mit dem Abstand $l^{(A)}$ an den Punkten $x_1^{(A)}$ & $x_2^{(A)}$ ruhen. Falls der Beobachter im Punkt $x_1^{(A)}$ die Zeit der Uhr in $x_2^{(A)}$ einfach ablesen würde, so würden die Uhren nicht synchron laufen, da das Licht die Zeit $l^{(A)}/c$ benötigt um den Weg $l^{(A)}$ zurückzulegen. Daher muss der Beobachter in $x_1^{(A)}$ seine Uhr relativ zur Uhr in $x_2^{(A)}$ um die Zeit $l^{(A)}/c$ vorstellen um sie zu synchronisieren. Der Beobachter sieht nun die Uhr in $x_2^{(A)}$ zwar nachgehen, trotzdem laufen sie aber synchron. Nur ein Beobachter der gleich weit von beiden Uhren entfernt ist sieht, dass beide Uhren synchron zu einander laufen.

Gleichzeitigkeit	Zwei Ereignisse finden in einem Bezugssystem gleichzeitig statt, wenn die von den Ereignissen ausgesandten Lichtsignale einen Beobachter, der sich in der Mitte zwischen den Ereignissen befindet, zur selben Zeit erreichen.
Vorsprung der führenden Uhr	Zwei Ereignisse, die in einem Bezugssystem gleichzeitig stattfinde, sind in einem anderen Bezugssystem, das sich relativ zum ersten bewegt typischerweise nicht gleichzeitig. Zwei in ihrem Ruhesystem synchronisierte Uhren sind in einem anderen Bezugssystem, in dem sie sich bewegen, nicht synchron. Die führende Uhr geht um die Zeit $\Delta t = \Delta x_{eigen} \cdot \frac{v_B^{(A)}}{c^2}$ vor, wobei Δx_{eigen} die Eigenlänge des Abstands zwischen den beiden Uhren ist.

APPENDIX

FOURRIER-ANALYSE MIT RAD!

Normalform	$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\hat{a}_n \cdot cos\left(n2\pi \frac{t}{T}\right) + \hat{b}_n \cdot sin\left(n2\pi \frac{t}{T}\right)\right]$
Koeffizienten berechnung	DC-Anteil: $a_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} u(\omega t)\, d(\omega t) = \mathit{Mittelwert}$ $\hat{a}_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot cos(n\omega t)\ dt = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} u(\omega t) \cdot cos(n\omega t)\, d(\omega t)$ $\hat{b}_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot sin(n\omega t)\ dt = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} u(\omega t) \cdot sin(n\omega t)\, d(\omega t)$
Spektralform	$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{c}_n \cdot cos(n\omega t - \psi_n)$ $u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{c}_n \cdot sin(n\omega t - \phi_n)$
Amplituden spektrum	$\hat{c}_n = \sqrt{\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2}$ $\quad tan(\phi_n) = \frac{\hat{a}_n}{\hat{b}_n}$ $\quad tan(\psi_n) = \frac{\hat{b}_n}{\hat{a}_n}$

Bem: die unbestimmten Koeffizienten $\hat{a}_n$ als Integral stehen lassen, da für gewisse n versch. Stammfunktionen existieren

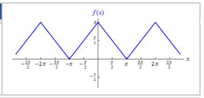
SYMMETRIEN UND VEREINFACHUNGEN (2|123&250-253)

gerade Funktionen $\quad u(t) = u(-t)$

$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} u(t)\, dt$

$\hat{a}_n = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} u(t) \cdot \cos(n\omega t)\ dt$

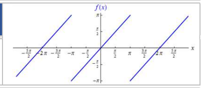
$\hat{b}_n = 0$



ungerade Funktionen $\quad u(t) = -u(-t)$

$a_0 = \hat{a}_n = 0$

$\hat{b}_n = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{T/2} u(t) \cdot \sin(n\omega t)\ dt$

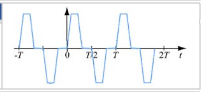


Halbwellensymmetrie $\quad u(t) = -u(t + T/2)$

$a_0 = 0 \qquad \hat{a}_{2n} = \hat{b}_{2n} = 0$

$\hat{a}_{2n-1} = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{T/2} u(t) \cdot \cos[(2n-1)\omega t]\, dt$

$\hat{b}_{2n-1} = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{T/2} u(t) \cdot \sin[(2n-1)\omega t]\, dt$

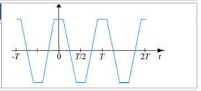


gerade Funktion mit Halbwellensymmetrie

$u(t) = u(-t) = -u(t + \frac{T}{2})$

$a_0 = \hat{a}_{2n} = \hat{b}_n = 0$

$\hat{a}_{2n-1} = \frac{8}{T} \cdot \int_0^{T/4} u(t) \cdot \cos[(2n-1)\omega t]\ dt$

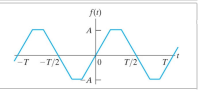


ungerade Funktion mit Halbwellensymmetrie

$u(t) = -u(-t) = -u(t + \frac{T}{2})$

$a_0 = \hat{a}_n = \hat{b}_{2n} = 0$

$\hat{b}_{2n-1} = \frac{8}{T} \cdot \int_0^{T/4} u(t) \cdot \sin[(2n-1)\omega t]\ dt$



Stammfunktionen für Fourrier Zerlegung

$\int_{T_1}^{T_2} \sin(\omega t)\cos(\omega t)\, dt = \left[-\frac{\cos(2\omega t)}{4\omega}\right]_{T_1}^{T_2}$

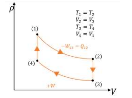
$\int_{T_1}^{T_2} \sin(\omega t)\sin(\omega t)\, dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}\right]_{T_1}^{T_2}$

$\int_{T_1}^{T_2} \sin(\omega t)\cos(n\omega t)\, dt = \left[\frac{\cos(\omega t)\cos(n\omega t) + n sin(\omega t)\sin(n\omega t)}{\omega(n^2-1)}\right]_{T_1}^{T_2}$

$\int_{T_1}^{T_2} \sin(\omega t)\sin(n\omega t)\, dt = \left[\frac{\cos(\omega t)\sin(n\omega t) - n sin(\omega t)\cos(n\omega t)}{\omega(n^2-1)}\right]_{T_1}^{T_2}$

STIRLING MASCHINE

1. Isotherme Expansion
2. Isochore Abkühlung
3. Isotherme Kompression
4. Isochore Erwärmung



Wärmemaschine
$T_1 = T_2$ →warmes Reservoir
$T_3 = T_4$ →kaltes Reservoir

$\underline{1 \to 2}$ $\quad \Delta U = 0 \Rightarrow W_{12} = -Q_{12} = -\tilde{n}RT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

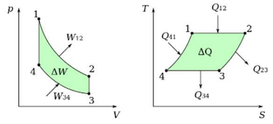
$\underline{2 \to 3}$ $\quad \Delta V = 0 \Rightarrow W_{23} = 0\, , Q_{23} = \tilde{n}c_V(T_3 - T_2)$

$\underline{3 \to 4}$ $\quad \Delta U = 0 \Rightarrow W_{34} = -Q_{34} = -\tilde{n}RT_3 \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)$

$\underline{4 \to 1}$ $\quad \Delta V = 0 \Rightarrow W_{41} = 0\, , Q_{41} = \tilde{n}c_V(T_1 - T_4)$

Effizienz: $\eta = \frac{|\sum W|}{Q_n} = \frac{|W_{12}+W_{23}+W_{34}+W_{41}|}{Q_{12}+Q_{41}} = \frac{T_1 - T_3}{T_1}$
Verhältnis aus der geleisteten Arbeit und der aus dem heissen Reservoir aufgenommenen Energie

Stirling-Kreisprozess



BEWEIS DER INVARIANTE DES RAUMZEITLICHEN ABSTANDES

$\Delta s \coloneqq raumzeitlicher\ Abstand\ im\ BezugssystemA$
$\Delta s' \coloneqq raumzeitlicher\ Abstand\ im\ Bezugssystem\ B$

räumlicher Abstand$\begin{cases}\Delta x\ = x_2 - x_1 \\ \Delta x' = x_2' - x_1'\end{cases}$, zeitlicher Abstand$\begin{cases}\Delta t\ = t_2 - t_1 \\ \Delta t' = t_2' - t_1'\end{cases}$

$$\Delta s' = \sqrt{(c\Delta t')^2 - \Delta x'^2} = \sqrt{c^2(t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')}$$

$$= \left[c^2\left(\gamma\left(t_2 - \frac{vx_2}{c^2}\right) - \gamma\left(t_1 - \frac{vx_1}{c^2}\right)\right)^2 - \left(\gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1)\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= \left[c^2\left(\gamma(t_2 - t_1) - \frac{\gamma v}{c^2}(x_2 - x_1)\right)^2 - \left(\gamma(x_2 - x_1) - \gamma v(t_2 - t_1)\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= \Big[c^2\gamma^2(t_2 - t_1)^2 - 2c^2\frac{\gamma^2 v}{c^2}(t_2 - t_1)(x_2 - x_1) + c^2\frac{\gamma^2 v^2}{c^4}(x_2 - x_1)^2 -$$
$$\gamma^2(x_2 - x_1)^2 + 2\gamma^2 v(t_2 - t_1)(x_2 - x_1) - \gamma^2 v^2(t_2 - t_1)^2\Big]^{1/2}$$

$$= \left[\underbrace{(c^2\gamma^2 - \gamma^2 v^2)(t_2 - t_1)^2}_{c^2} + \left(\underbrace{\frac{\gamma^2 v^2}{c^2} - \gamma^2}_{-1}\right)(x_2 - x_1)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{(c\Delta t)^2 - \Delta x^2} = \Delta S \qquad \blacksquare$$